Midtoets Lineaire Algebra 1, 11 december 2006

De toets bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven zijn de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

en de vector

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \beta \end{pmatrix},$$

met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bekijk het stelsel vergelijkingen $Ax = b$.

a. Bepaal alle waarden van α en β waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.

b. Bepaal alle waarden van α en β waarvoor het stelsel strijdig is.

c. Bepaal alle waarden van α en β waarvoor het stelsel precies een oplossing heeft.

d. Bepaal de oplossing van het stelsel voor het geval dat $\alpha = 6$ en $\beta = 4$.

2. Stel dat A, B en C $m \times n$ matrices zijn.

a. Wat betekent de uitspraak dat A en B rij-equivalent zijn?

b. Toon aan: als A rij-equivalent is met B dan is B rij-equivalent met A.

c. Toon aan: als A rij-equivalent is met B en B is rij-equivalent met C, dan is A rij-equivalent met C.

d. Toon aan: als $m = n$ en A en B zijn niet-singulier, dan zijn A en B rij-equivalent.

3. Bepaal de inverse van de matrix A gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Beschouw de matrix M gegeven in blok-vorm door

$$M = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & B & I \end{pmatrix}.$$

a. Toon aan: M is niet-singulier dan en slechts dan als C niet-singulier is.

b. Stel C is niet-singulier. Bepaal de blok-vorm van A^{-1}.

5. Bekijk voor elke $x \in \mathbb{R}$ de 3×3 matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal $\det(A)$ als functie van x.

b. Bepaal alle waarden van x waarvoor A singulier is.

6. We bekijken in de vectorruimte $\mathbb{R}^{n\times n}$ de deelverzameling S van alle scheef-symmetrische matrices, i.e.

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = -A\}.$$

a. Laat zien dat S een deelruimte is van $\mathbb{R}^{n\times n}$.

b. Neem nu aan dat $n = 2$. Bepaal vectoren in S die S opspannen en die lineair onafhankelijk zijn

c. Neem aan dat $n = 2$. Wat is de dimensie van S?